第一章
一階常微分方程式與應用

習題 1-1

1. 就下列微分方程式，決定 (a) 階數，(b) 次數，(c) 線性，(d) 非線性.

(5) $y^{(4)}+3(\cos x)y'''+y'=0$

解：(5) 四階一次線性微分方程式

2. 試證下列左邊各函數爲右邊微分方程式的解.

(3) $y=c_1 \cos(2x+c_2)$，$\dfrac{d^2y}{dx^2}+4y=0$

解：微分二次，$\dfrac{dy}{dx}=-2c_1 \sin(2x+c_2)$，$\dfrac{d^2y}{dx^2}=-4c_1 \cos(2x+c_2)$，代入微分方程式，得

$$\frac{d^2y}{dx^2}+4y=-4c_1 \cos(2x+c_2)+4c_1 \cos(2x+c_2)=0$$

故 $y=c_1 \cos(2x+c_2)$ 爲微分方程式之解.

3. 試證函數 $y(x)=2x^{\frac{1}{2}}-x^{\frac{1}{2}} \ln x$ 爲微分方程式 $4x^2y''+y=0$ 在區間 $(0, \infty)$ 的顯函數解.

解：我們首先求 $y'(x)$ 與 $y''(x)$，得

$$y'(x)=-\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} \ln x,\quad y''(x)=\frac{1}{4}x^{-\frac{3}{2}} \ln x-\frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}}$$

將 $y'(x)$ 與 $y''(x)$ 代入原微分方程式，得

$$4x^2y''+y=4x^2\left(\frac{1}{4}x^{-\frac{3}{2}} \ln x-\frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}}\right)+2x^{\frac{1}{2}}-x^{\frac{1}{2}} \ln x=0$$

故 $\forall\ x>0$，$y(x)=2x^{\frac{1}{2}}-x^{\frac{1}{2}}\ln x$ 滿足微分方程式 $4x^2y''+y=0$.

5. 對某些常數 m，函數 $f(x)=e^{mx}$ 爲微分方程式 $\dfrac{d^3y}{dx^3}-3\dfrac{d^2y}{dx^2}-4\dfrac{dy}{dx}+12y=0$ 的解，試決定 m 的值.

解：連續微分，得

$$\begin{cases} y=e^{mx} \\ y'=me^{mx} \\ y''=m^2e^{mx} \\ y'''=m^3e^{mx} \end{cases}$$

代入 $\dfrac{d^3y}{dx^3}-3\dfrac{d^2y}{dx^2}-4\dfrac{dy}{dx}+12y=0$ 中，

得　$m^3-3m^2-4m+12=0 \Rightarrow (m-2)(m-3)(m+2)=0$

所以，$m=-2$，2，3.

7. 已知微分方程式 $\dfrac{dy}{dx}+y=2xe^{-x}$ 的通解可以寫成 $y=(x^2+c)e^{-x}$，解下列初期值問題：

(2) $\begin{cases} \dfrac{dy}{dx}+y=2xe^{-x} \\ y(-1)=e+3 \end{cases}$

解：因 $x=-1$，$y=e+3$，得 $e+3=[(-1)^2+c]e \Rightarrow c=\dfrac{3}{e}$，

故 $y=\left(x^2+\dfrac{3}{e}\right)e^{-x}$.

習題 1-2

1. 求下列各微分方程式的通解.

(3) $y'=\dfrac{\cos x}{3y^2+e^y}$

解：$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{\cos x}{3y^2+e^y}$，變數分離得 $(3y^2+e^y)\,dy=\cos x\,dx$

兩端積分，得
$$\int (3y^2+e^y)\,dy=\int \cos x\,dx$$

故 $y^3+e^y=\sin x+c$，其中 c 爲常數.

⑸ $(1+y^2)\,dx-(1+x^2)\,dy=0$

解：將原式同除以 $(1+y^2)(1+x^2)$，得

$$\frac{dx}{1+x^2}-\frac{dy}{1+y^2}=0$$

積分得
$$\int \frac{dx}{1+x^2}-\int \frac{dy}{1+y^2}=0$$

故 $\tan^{-1}x-\tan^{-1}y=c$，其中 c 爲常數.

2. 解下列初期值問題.

⑶ $\begin{cases}(y+2)y'=\sin x\\ y(0)=0\end{cases}$

解：變數分離，得
$$(y+2)\,dy-\sin x\,dx=0$$

其特解爲
$$\int_0^y (y+2)\,dy-\int_0^x \sin x\,dx=0$$

則 $\left.\dfrac{y^2}{2}+2y\right|_0^y-\left(\left.-\cos x\right|_0^x\right)=0$ 或 $\dfrac{y^2}{2}+2y+\cos x=1$ 爲所求.

習題 1-3

1. 判斷下列齊次函數的次數.

⑵ $f(x,\ y)=e^{\frac{y}{x}}+\tan\dfrac{y}{x}$

解：設 λ 爲不等於 0 的實數，則

$$f(\lambda x,\ \lambda y)=e^{\frac{\lambda y}{\lambda x}}+\tan\frac{\lambda y}{\lambda x}=e^{\frac{y}{x}}+\tan\frac{y}{x}=1\times\left(e^{\frac{y}{x}}+\tan\frac{y}{x}\right)=\lambda^0 f(x,\ y)$$

故 $f(x, y)$ 是零次齊次函數.

2. 解下列各微分方程式.

(1) $(y^2-x^2)\,dx-2xy\,dy=0$

解：該微分方程式為 2 次齊次微分方程式，令 $y=vx$，則

$$dy=v\,dx+x\,dv$$

代入原式得　$(v^2x^2-x^2)\,dx-2vx^2(v\,dx+x\,dv)=0$

即　$(v^2+1)x^2\,dx+2vx^3\,dv=0$

分離變數再積分，得　$\displaystyle\int\frac{dx}{x}+\int\frac{2v}{1+v^2}\,dv=0$

故 $\ln|x|+\ln(1+v^2)=c_1$ 或 $\ln|x|(1+v^2)=c_1$，

則 $|x|(1+v^2)=e^{c_1}$，化簡得 $x(1+v^2)=c$ (令 $c=e^{c_1}$，且 $e^{c_1}>0$)

故得 $x^2+y^2=cx$.

(3) $2x^3y\,dx+(x^4+y^4)\,dy=0$

解：該微分方程式為 4 次齊次微分方程式，令 $x=vy$，則

$$dx=v\,dy+y\,dv$$

代入原微分方程式，得

$$2v^3y^4(v\,dy+y\,dv)+(v^4+1)y^4\,dy=0$$

化簡得　$(3v^4+1)\,dy+2v^3y\,dv=0$

分離變數再積分，得　$\displaystyle\int\frac{dy}{y}+\int\frac{2v^3}{3v^4+1}\,dv=0$

故 $\ln|y|+\dfrac{1}{6}\ln(3v^4+1)=c$ 或 $\ln|y|+\dfrac{1}{6}\ln\left[3\left(\dfrac{x}{y}\right)^4+1\right]=c$ 為所求，

其中 c 為常數.

習題 1-4

2. 解下列各微分方程式.

(1) $(3x^2+4xy)\,dx+(2x^2+2y)\,dy=0$

解：$M(x,y)=3x^2+4xy$，$N(x,y)=2x^2+2y$，$\dfrac{\partial M}{\partial y}=4x$，$\dfrac{\partial N}{\partial x}=4x$.

因 $\dfrac{\partial M}{\partial y}=\dfrac{\partial N}{\partial x}$，故原微分方程式爲正合微分方程式.

由
$$\frac{\partial \phi}{\partial x}=M(x,y)=3x^2+4xy$$

可得
$$\phi(x,y)=\int^{(x)}(3x^2+4xy)\,dx=x^3+2x^2y+g(y)$$

而
$$\frac{\partial \phi}{\partial y}=2x^2+g'(y)=2x^2+2y$$

$g'(y)=2y$，可得 $g(y)=y^2+c_1$

故通解爲 $x^3+2x^2y+y^2=c$，其中 c 爲常數.

(2) $(e^{2y}-y\cos xy)\,dx+(2xe^{2y}-x\cos xy+2y)\,dy=0$

解：$M(x,y)=e^{2y}-y\cos xy$，$N(x,y)=2xe^{2y}-x\cos xy+2y$

$$\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}(e^{2y}-y\cos xy)=2e^{2y}+xy\sin xy-\cos xy$$

$$\frac{\partial N}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}(2xe^{2y}-x\cos xy+2y)=2e^{2y}+xy\sin xy-\cos xy$$

因 $\dfrac{\partial M}{\partial y}=\dfrac{\partial N}{\partial x}$，故原微分方程式爲正合微分方程式.

由
$$\frac{\partial \phi}{\partial x}=M(x,y)=e^{2y}-y\cos xy$$

可得
$$\phi(x,y)=\int^{(x)}(e^{2y}-y\cos xy)\,dx=xe^{2y}-\sin xy+g(y)$$

而
$$\frac{\partial \phi}{\partial y}=2xe^{2y}-x\cos xy+g'(y)=2xe^{2y}-x\cos xy+2y$$

$g'(y)=2y$，可得 $g(y)=y^2+c_1$

故通解爲 $xe^{2y}-\sin xy+y^2=c$，其中 c 爲常數.

⑸ $(\cos y+y\cos x)\,dx+(\sin x-x\sin y)\,dy=0$

解：$M(x,\ y)=\cos y+y\cos x$，$N(x,\ y)=\sin x-x\sin y$

$$\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}(\cos y+y\cos x)=-\sin y+\cos x$$

$$\frac{\partial N}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}(\sin x-x\sin y)=\cos x-\sin y$$

因 $\dfrac{\partial M}{\partial y}=\dfrac{\partial N}{\partial x}$，故原微分方程式爲正合微分方程式.

將原式展開並重組，可得

$$(y\cos x\,dx+\sin x\,dy)+(\cos y\,dx-x\sin y\,dy)=0$$

即 $$d(y\sin x)+d(x\cos y)=0$$

積分得 $$\int d(y\sin x)+\int d(x\cos y)=c$$

故通解爲 $y\sin x+x\cos y=c$，其中 c 爲常數.

3. 解下列初期值問題.

⑴ 解微分方程式 $(y^3-y^2\sin x-x)\,dx+(3xy^2+2y\cos x)\,dy=0$.

解：
$$\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}(y^3-y^2\sin x-x)=3y^2-2y\sin x$$

$$\frac{\partial N}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}(3xy^2+2y\cos x)=3y^2-2y\sin x$$

因 $\dfrac{\partial M}{\partial y}=\dfrac{\partial N}{\partial x}$，故微分方程式爲正合.

將原式展開並重組，可得

即 $(y^3\,dx+3xy^2\,dy)+(-y^2\sin x\,dx+2y\cos x\,dy)-x\,dx=0$

即 $$d(y^3x)+d(y^2\cos x)-d\left(\frac{x^2}{2}\right)=0$$

故 $$y^3x+y^2\cos x-\frac{x^2}{2}=c.$$

(3) $\begin{cases} y'=\dfrac{-2xy}{1+x^2} \\ y(2)=-5 \end{cases}$

解：將原式整理成 $$2xy\,dx+(1+x^2)\,dy=0$$

$M(x, y)=2xy$，$N(x, y)=1+x^2$，$\dfrac{\partial M}{\partial y}=2x$，$\dfrac{\partial N}{\partial x}=2x$

因 $\dfrac{\partial M}{\partial y}=\dfrac{\partial N}{\partial x}$，故原微分方程式爲正合微分方程式.

將原式展開重組，可得 $(2xy\,dx+x^2\,dy)+dy=0$

即 $d(x^2y)+dy=0$，積分得 $\displaystyle\int d(x^2y)+\int dy=c$

故通解爲 $x^2y+y=c$，將 $x=2$，$y=-5$ 代入通解中，得 $c=-25$.
故 $x^2y+y=-25$ 爲所求.

習題 1-5

試解下列各微分方程式.

3. $(x^2+y^2+x)\,dx+xy\,dy=0$

解：$M(x, y)=x^2+y^2+x$，$N(x, y)=xy$，$\dfrac{\partial M}{\partial y}=2y$，$\dfrac{\partial N}{\partial x}=y$.

因 $\dfrac{\partial M}{\partial y}\neq\dfrac{\partial N}{\partial x}$，故原微分方程式非正合微分方程式.

而 $$\frac{\dfrac{\partial M}{\partial y}-\dfrac{\partial N}{\partial x}}{N}=\frac{2y-y}{xy}=\frac{1}{x}=f(x)$$

得知 $\mu(x)=e^{\int f(x)\,dx}=e^{\int\frac{dx}{x}}=e^{\ln x}=x$ 爲原微分方程式之一積分因子，
故 $(x^3+xy^2+x^2)\,dx+x^2y\,dy=0$ 爲正合微分方程式.

或 $$x^3\,dx+x^2\,dx+(xy^2\,dx+x^2y\,dy)=0$$

即 $$x^3\,dx+x^2\,dx+d\left(\frac{1}{2}x^2y^2\right)=0$$

積分得 $\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2y^2=c_1$ 或 $3x^4+4x^3+6x^2y^2=c$，

其中 c 爲常數.

4. $\frac{dx}{dy}=\frac{1}{x^2(1-3y)}$

解：將原微分方程式改寫成 $(3x^2y-x^2)\,dx+1\,dy=0$

$M(x,\ y)=3x^2y-x^2$，$N(x,\ y)=1$，$\frac{\partial M}{\partial y}=3x^2$，$\frac{\partial N}{\partial x}=0$

因 $\frac{\partial M}{\partial y}\neq\frac{\partial N}{\partial x}$，故原微分方程式非正合微分方程式.

而 $$\frac{\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}}{N}=\frac{3x^2-0}{1}=3x^2=f(x)$$

得知 $\mu(x)=e^{\int f(x)\,dx}=e^{\int 3x^2\,dx}=e^{x^3}$ 爲原微分方程式之一積分因子，

故 $(3x^2y-x^2)e^{x^3}\,dx+e^{x^3}\,dy=0$ 爲正合微分方程式.

由 $\frac{\partial\phi}{\partial x}=(3x^2y-x^2)e^{x^3}$，可得

$$\phi(x,\ y)=\int^{(x)}(3x^2y-x^2)e^{x^3}dx=ye^{x^3}-\frac{1}{3}e^{x^3}+g(y)$$

而 $$\frac{\partial\phi}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(ye^{x^3}-\frac{1}{3}e^{x^3}+g(y)\right)=e^{x^3}+g'(y)=e^{x^3}$$

$g'(y)=0$，可得 $g(y)=c_1$

故 $ye^{x^3}-\frac{1}{3}e^{x^3}=c$ 爲所求，其中 c 爲常數.

6. $3y\,dx+x(2+y^3)\,dy=0$

解：$M(x,\ y)=3y$，$N(x,\ y)=x(2+y^3)$，$\dfrac{\partial M}{\partial y}=3$，$\dfrac{\partial N}{\partial x}=2+y^3$.

因 $\dfrac{\partial M}{\partial y}\neq\dfrac{\partial N}{\partial x}$，故原微分方程式非正合微分方程式，

而 $$\frac{\dfrac{\partial M}{\partial y}-\dfrac{\partial N}{\partial x}}{M}=\frac{3-2-y^3}{3y}=\frac{1}{3y}-\frac{y^2}{3}=f(y)$$

得知 $$\mu(y)=e^{-\int f(y)\,dy}=e^{-\int\left(\frac{1}{3y}-\frac{y^2}{3}\right)dy}=e^{-\left(\frac{1}{3}\ln|y|-\frac{1}{9}y^3\right)}=e^{\frac{1}{9}y^3-\frac{1}{3}\ln|y|}$$

$$=e^{-\frac{1}{3}\ln|y|}\cdot e^{\frac{y^3}{9}}=e^{\ln|y^{-\frac{1}{3}}|}\cdot e^{\frac{y^3}{9}}=y^{-\frac{1}{3}}e^{\frac{y^3}{9}}\ (\text{取 } y>0)$$

爲原微分方程式之一積分因子，故

$3y^{\frac{2}{3}}e^{\frac{y^3}{9}}\,dx+(2xy^{-\frac{1}{3}}e^{\frac{y^3}{9}}+xy^{\frac{8}{3}}e^{\frac{y^3}{9}})\,dy=0$ 爲正合微分方程式.

上式即爲 $$d(3xy^{\frac{2}{3}}e^{\frac{y^3}{9}})=0$$

兩邊積分，得 $3xy^{\frac{2}{3}}e^{\frac{y^3}{9}}=c$ 或 $x^9y^6e^{y^3}=k$ 爲所求，其中 $k=\left(\dfrac{c}{3}\right)^9$.

9. $\dfrac{dy}{dx}+y=\sin x$

解：$y=e^{-\int dx}\left[\int e^{\int dx}\sin x\,dx+c\right]=e^{-x}\left[\int e^x\sin x\,dx+c\right]$

利用分部積分法，知 $\displaystyle\int e^x\sin x\,dx=\frac{e^x}{2}(\sin x-\cos x)$

故 $y=e^{-x}\left[\dfrac{e^x}{2}(\sin x-\cos x)+c\right]=\dfrac{1}{2}(\sin x-\cos x)+ce^{-x}$，

其中 c 爲常數.

11. $(x^2+1)\dfrac{dy}{dx}+4xy=x$

解：將原微分方程式改寫爲 $\dfrac{dy}{dx}+\dfrac{4x}{x^2+1}\,y=\dfrac{x}{x^2+1}$，

$$
\begin{aligned}
y&=e^{-\int \frac{4x}{x^2+1}\,dx}\left[\int e^{\int \frac{4x}{x^2+1}\,dx}\cdot \frac{x}{x^2+1}\,dx+c\right]\\
&=e^{-2\ln(x^2+1)}\left[\int e^{2\ln(x^2+1)}\cdot \frac{x}{x^2+1}\,dx+c\right]\\
&=\frac{1}{(x^2+1)^2}\left[\int (x^2+1)\cdot x\,dx+c\right]\\
&=\frac{1}{(x^2+1)^2}\left[\frac{1}{4}(x^2+1)^2+c\right]\\
&=\frac{1}{4}+\frac{c}{(x^2+1)^2}\text{，其中 } c \text{ 爲常數.}
\end{aligned}
$$

15. $y\dfrac{dx}{dy}+\dfrac{x}{\ln y}=1$

解：將原微分方程式之每一項除以 y，即得 x 之一階線性微分方程式，

$$\frac{dx}{dy}+\frac{1}{y\ln y}x=\frac{1}{y}$$

依通解之公式得

$$
\begin{aligned}
x&=e^{-\int \frac{1}{y\ln y}\,dy}\left[\int e^{\int \frac{1}{y\ln y}\,dy}\cdot \frac{1}{y}\,dy+c\right]\\
&=e^{-\ln|\ln y|}\left[\int e^{\ln|\ln y|}\frac{1}{y}\,dy+c\right]\\
&=\frac{1}{|\ln y|}\left[\int \frac{|\ln y|}{y}\,dy+c\right]\\
&=\frac{1}{\ln y}\left[\frac{1}{2}(\ln y)^2+c\right]
\end{aligned}
$$

即 $x=\dfrac{1}{2}\ln y+\dfrac{c}{\ln y}$ 爲所求，其中 c 爲常數.

習題 1-6

試解下列各微分方程式.

1. $\dfrac{dy}{dx}+xy=xy^2$

解：此為 $n=2$ 的柏努利方程式，將原式等號兩邊除以 y^2，得

$$y^{-2}\frac{dy}{dx}+xy^{-1}=x$$

令 $y^{-1}=v$，則 $-y^{-2}\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{dv}{dx}$ 代入上式得 $-\dfrac{dv}{dx}+xv=x$

即 $\dfrac{dv}{dx}-xv=-x$ 此為 v 的一階線性微分方程式.

其通解為 $v=e^{\int x\,dx}\left[\int e^{-\int x\,dx}\cdot(-x)\,dx+c\right]=e^{\frac{1}{2}x^2}\left[-\int e^{-\frac{x^2}{2}}x\,dx+c\right]$

$$=e^{\frac{x^2}{2}}\left[\int e^{-\frac{x^2}{2}}d\left(-\frac{x^2}{2}\right)+c\right]=e^{\frac{x^2}{2}}\left(e^{-\frac{x^2}{2}}+c\right)$$

$$=1+ce^{\frac{x^2}{2}}$$

故原微分方程式之通解為 $y=\dfrac{1}{1+ce^{\frac{x^2}{2}}}$，其中 c 為常數.

2. $\dfrac{dy}{dx}+\dfrac{1}{x}y=3x^2y^3$

解：此為 $n=3$ 的柏努利方程式，將原式等號兩邊除以 y^3，得

$$y^{-3}\frac{dy}{dx}+\frac{1}{x}y^{-2}=3x^2$$

令 $y^{-2}=v$，則 $-2y^{-3}\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{dv}{dx}$ 代入上式得

$$-\frac{1}{2}\frac{dv}{dx}+\frac{1}{x}v=3x^2 \text{ 或 } \frac{dv}{dx}-\frac{2}{x}v=-6x^2$$

此為 v 的一階線性微分方程式，其通解為

$$v=e^{\int\frac{2}{x}dx}\left[\int e^{-\int\frac{2}{x}dx}\cdot(-6x^2)\,dx+c\right]$$

$$=e^{2\ln|x|}\left[\int e^{-2\ln|x|}\cdot(-6x^2)\,dx+c\right]$$

$$=x^2\left[-6\int dx+c\right]=x^2(c-6x)=(cx^2-6x)$$

故原微分方程式之通解爲 $y^{-2}=\dfrac{1}{x^2(c-6x)}$，其中 c 爲常數.

3. $\dfrac{dy}{dx}+y=xy^3$

解：此爲 $n=3$ 的柏努利方程式，將原式等號兩邊除以 y^3，得

$$y^{-3}\frac{dy}{dx}+y^{-2}=x$$

令 $y^{-2}=v$，則 $-2y^{-3}\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{dv}{dx}$，代入上式得

$$-\frac{1}{2}\frac{dv}{dx}+v=x \text{ 或 } \frac{dv}{dx}-2v=-2x$$

此爲 v 的一階線性微分方程式，其通解爲

$$v=e^{\int 2\,dx}\left[\int e^{-\int 2\,dx}\cdot(-2x)\,dx+c\right]=e^{2x}\left[-2\int e^{-2x}\cdot x\,dx+c\right]$$

$$=e^{2x}\left[xe^{-2x}+\frac{1}{2}e^{-2x}+c\right]=x+\frac{1}{2}+ce^{2x}$$

故原微分方程式之通解爲 $\dfrac{1}{y^2}=x+\dfrac{1}{2}+ce^{2x}$，其中 c 爲常數.

試解下列初期值問題.

7. $\begin{cases}\dfrac{dy}{dx}+\dfrac{y}{2x}=\dfrac{x}{y^3}\\ y(1)=2\end{cases}$

解：此乃 $n=-3$ 之柏努利方程式，等號兩邊乘以 y^3 得 $y^3\dfrac{dy}{dx}+\dfrac{y^4}{2x}=x$，

令 $y^4=v$，則 $4y^3\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{dv}{dx}$，代入上式得 $\dfrac{1}{4}\dfrac{dv}{dx}+\dfrac{1}{2x}v=x$，

即 $\dfrac{dv}{dx}+\dfrac{2}{x}v=4x$，此爲 v 之一階線性微分方程式，其通解爲

$$v=e^{-\int\frac{2}{x}dx}\left[\int e^{\int\frac{2}{x}dx}\cdot 4x\,dx+c\right]=e^{-2\ln|x|}\left[\int e^{2\ln|x|}\cdot 4x\,dx+c\right]$$

$$=x^{-2}\left[4\int x^3\,dx+c\right]=x^{-2}(x^4+c)=x^2+cx^{-2}$$

將 $v=y^4$ 代入上式，得 $y^4=x^2+cx^{-2}$，其中 c 由 $y(1)=2$ 決定之，
即 $2^4=1^2+c$，故 $c=15$，所以原微分方程式之特解爲 $y^4=x^2+15x^{-2}$.

習題 1-7

2. 求圓族 $x^2+(y-c)^2=c^2$ 的正交軌線族.

解：對 x 微分得　$2x+2(y-c)y'=0$

即　$$y'=\frac{x}{c-y}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\text{①}$$

將 $x^2+(y-c)^2=c^2$ 展開得 $x^2+y^2-2cy+c^2=c^2$，

即 $x^2+y^2=2cy$，得 $c=\dfrac{x^2+y^2}{2y}$ 代回 ① 式中，

得　$$y'=\frac{x}{\dfrac{x^2+y^2}{2y}-y}=\frac{2xy}{x^2+y^2-2y^2}=\frac{2xy}{x^2-y^2}$$

故與此曲線族正交之軌線族之斜率爲 $y'=-\dfrac{x^2-y^2}{2xy}$，

即　$\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{x^2-y^2}{2xy}$ 或 $2xy\,dy=-(x^2-y^2)\,dx$

即　$$(x^2-y^2)\,dx+2xy\,dy=0\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\text{②}$$

② 式爲二次齊次微分方程式，令 $y=vx$，則 $dy=v\,dx+x\,dv$ 代入 ② 式，得

$$(x^2-v^2x^2)\,dx+2x(vx)(v\,dx+x\,dv)=0$$

化簡得 $x^2(1+v^2)\,dx+2vx^3\,dv=0$ 或 $\dfrac{dx}{x}+\dfrac{2v}{1+v^2}\,dv=0$

積分得 $\displaystyle\int\frac{dx}{x}+\int\frac{2v}{1+v^2}\,dv=\ln|c|$，即 $\ln|x|+\ln|1+v^2|=\ln|c|$

則 $\ln|x(1+v^2)|=\ln|c|$，故 $x(1+v^2)=c$.

再將 $v=\dfrac{y}{x}$ 代入上式，化簡得 $x^2+y^2=cx$ (其中 c 爲常數) 即爲所求之正交軌線族.

5. 求與直線族 $y=cx$ 交成 45° 角的斜交軌線族.

解：微分 $y=cx$，得 $y'=c$. 故此曲線族之斜率如設爲 $\tan\phi_2$，則 $\tan\phi_2=c=\dfrac{y}{x}$，又與此曲線族斜交成 45° 之曲線族的斜率設爲 $\tan\phi_1=y'$，則

$$\tan(\phi_2-\phi_1)=\tan\frac{\pi}{4}=1，即\ \frac{\tan\phi_2-\tan\phi_1}{1+\tan\phi_2\tan\phi_1}=1$$

故
$$\frac{\dfrac{y}{x}-y'}{1+\dfrac{y}{x}\cdot y'}=1\ 或\ \frac{y}{x}-y'=1+\frac{y}{x}\,y'$$

將兩邊乘以 x 再化簡得 $(y+x)\,dy+(x-y)\,dx=0$

即
$$(x\,dx+y\,dy)+(x\,dy-y\,dx)=0$$

上式之積分因子爲 $\dfrac{1}{x^2y^2}$，則

$$\frac{x\,dx+y\,dy}{x^2+y^2}+\frac{x\,dy-y\,dx}{x^2+y^2}=0$$

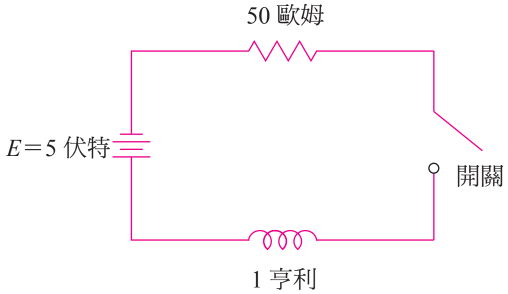
爲一正合微分方程式.

故　$$d\left(\frac{1}{2}\ln(x^2+y^2)\right)+d\left(\tan^{-1}\frac{y}{x}\right)=0$$

積分得 $\dfrac{1}{2}\ln(x^2+y^2)+\tan^{-1}\dfrac{y}{x}=k$，$k$ 爲常數，即爲所求之斜交軌線族.

14. 有一 RL 電路，外加電壓 5 伏特，其電阻 50 歐姆，電感爲 1 亨利，$t=0$ 時，$I=0$，求在時間 t 時的電流 I.

解：RL 電路圖示如下：



由迴路中電壓和等於外加電壓得 $I\dfrac{dI}{dt}+RI=E$

將各元件值代入得　$$I\frac{dI}{dt}+50I=5$$

即 $\dfrac{dI}{dt}+50I=5$ 此爲一階線性微分方程式，其解爲

$$I=e^{-\int 50\,dt}\left[\int e^{\int 50\,dt}\cdot 5\,dt+c\right]=e^{-50t}\left[\int e^{50t}\cdot 5\,dt+c\right]$$

$$=e^{-50t}\left[\frac{1}{10}e^{50t}+c\right]=\frac{1}{10}+ce^{-50t}$$

故　$$I(t)=\frac{1}{10}+ce^{-50t}$$

由於 $I(0)=0$，代入上式得 $c=-\dfrac{1}{10}$

故其解爲　$$I(t)=\frac{1}{10}\left(1-e^{-50t}\right).$$